MEJORA DE LA INCOMPATIBILIDAD Y LA INCONSISTENCIA EN UN CONTEXTO LOCAL DE DECISIÓN EN GRUPO CON AHP

Juan AGUARÓN

María Teresa ESCOBAR

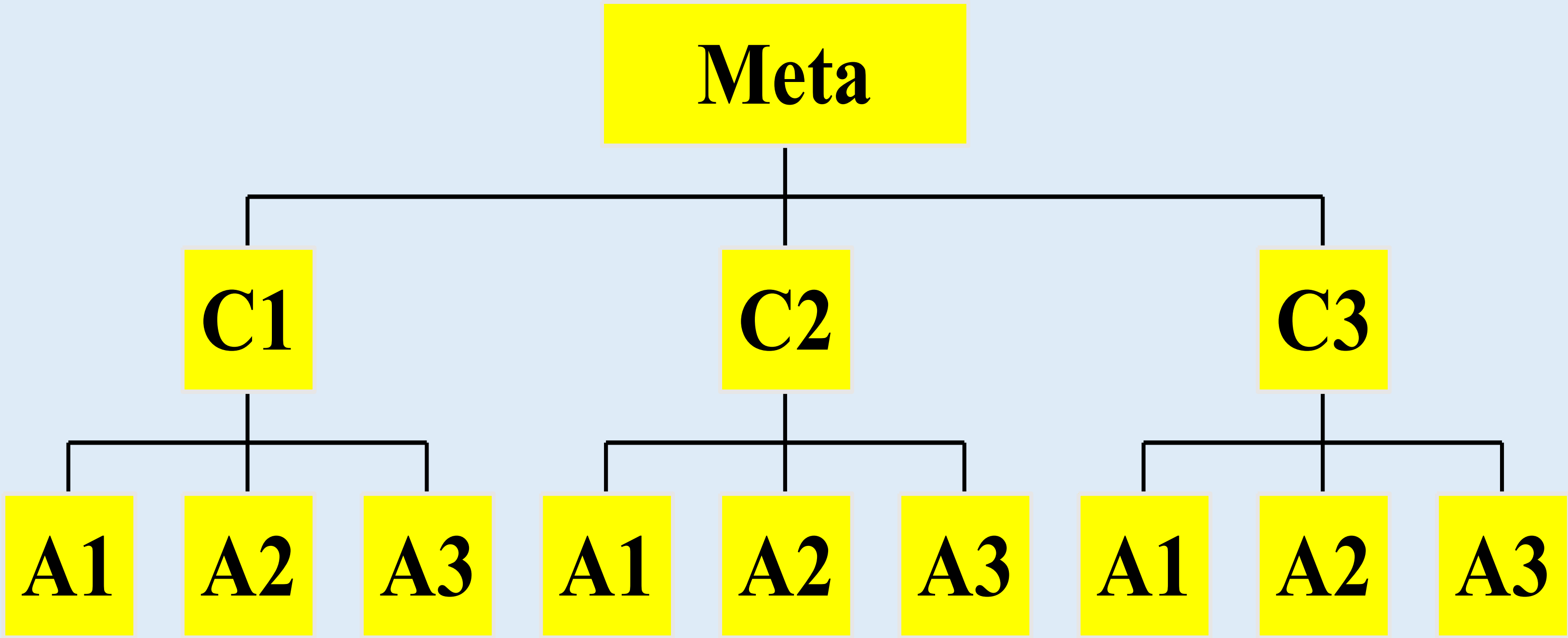
José María MORENO-JIMÉNEZ

Alberto TURÓN

Índice

Introducción

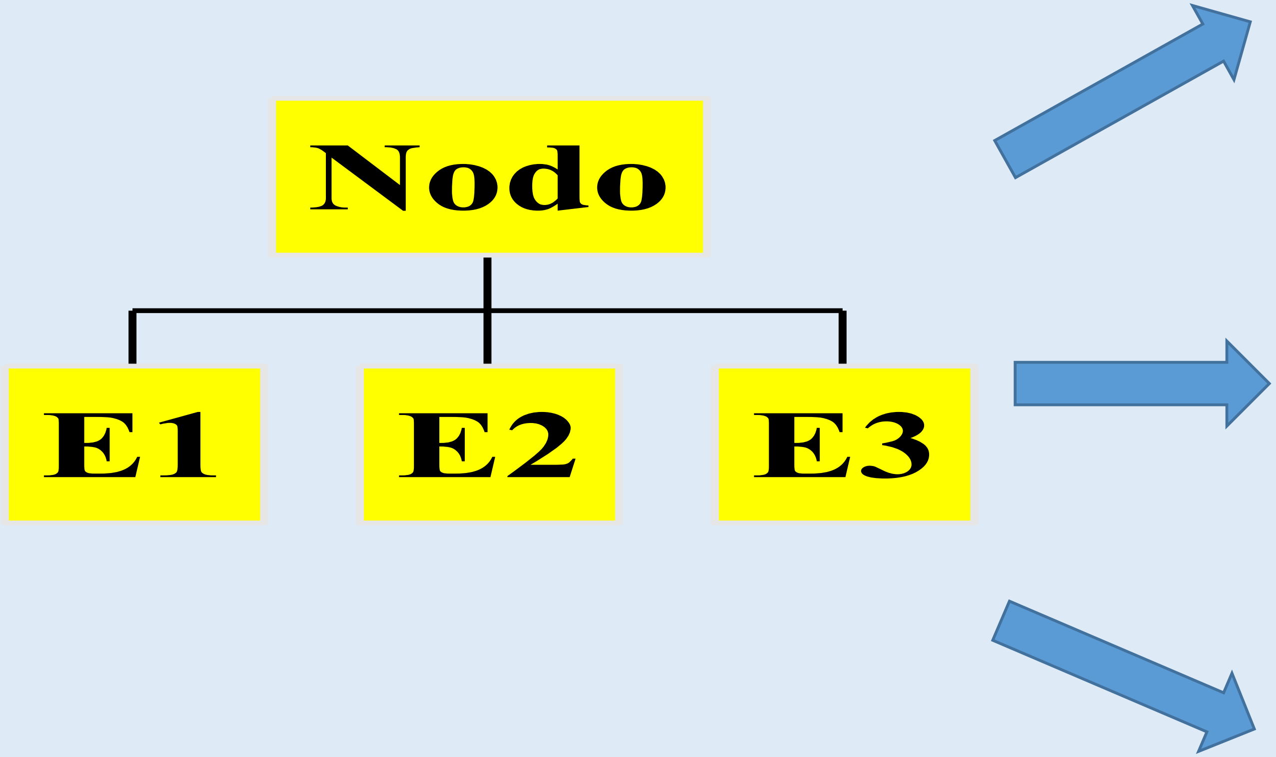
Proceso Analítico Jerárquico



Introducción

Proceso Analítico Jerárquico

Decisión en Grupo en un Contexto Local



$A^{(1)}=$

D1	C1	C2	C3
C1	1	2	5
C2		1	3
C3			1

$A^{(2)}=$

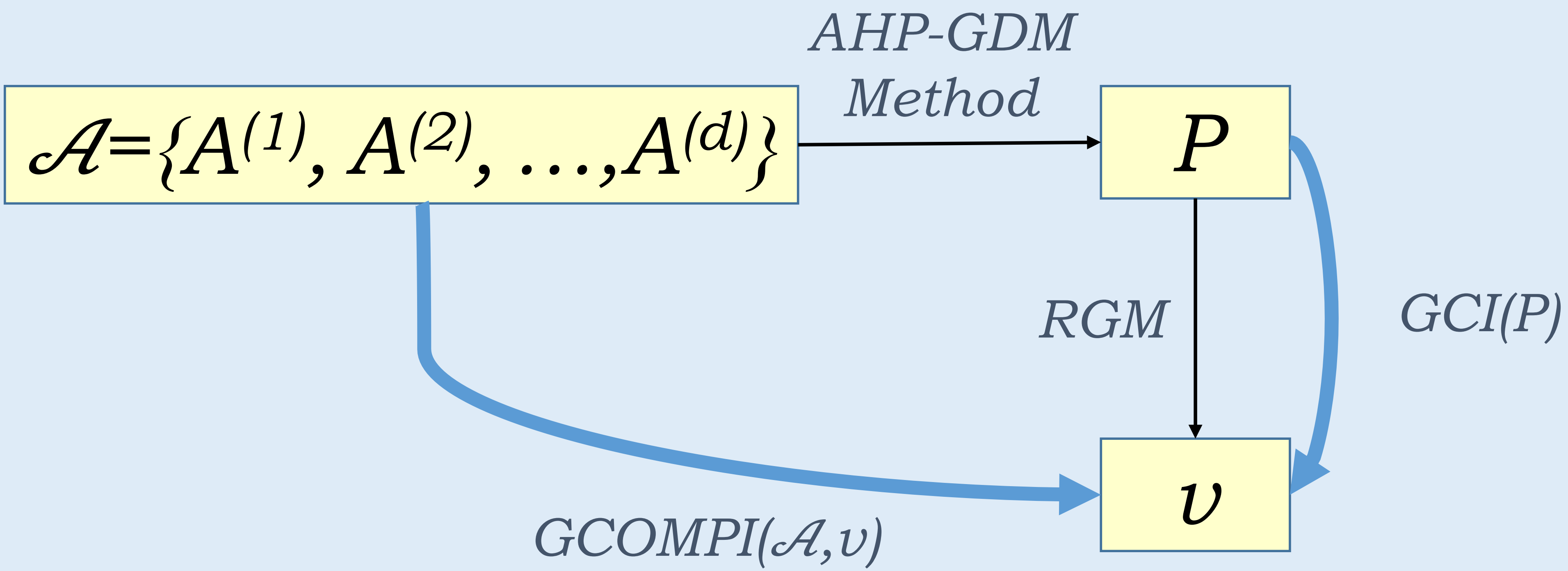
D2	A1	A2	A3
A1	1	2	3
A2		1	2
A3			1

$A^{(3)}=$

D3	A1	A2	A3
A1	1	1/2	2
A2		1	3
A3			1

Introducción

Decisión en Grupo en un Contexto Local



Introducción

Objetivo

Dado un problema de decisión en grupo en un contexto local, el objetivo es

- Modificar la matriz de consenso P
  - Realizando cambios pequeños en sus juicios para que el nuevo vector de prioridades no difiera del original
  - Reduciendo su inconsistencia (GCI)
  - Reduciendo el valor del GCOMPI

Reducción del Geometric Consistency Index

Definición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{RGM} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \longrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}w_2}{w_1} & \cdots & \frac{a_{1n}w_n}{w_1} \\ \frac{a_{21}w_1}{w_2} & 1 & & \frac{a_{2n}w_n}{w_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}w_1}{w_n} & \frac{a_{n2}w_2}{w_n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$GCI(A) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i,j} log^2 e_{ij} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i,j} log^2 \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)$$

Reducción del Geometric Consistency Index

Resultados. Variaciones absolutas

Si consideramos variaciones absolutas en un juicio:

$$p_{rs} \rightarrow p'_{rs} = p_{rs} + \Delta p_{rs}$$

Resultado:

Aguarón et al, 2021

$$\boxed{\frac{\partial GCI(P)}{\partial p_{rs}} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \frac{\log e_{rs}}{p_{rs}}}$$

- *Nos permite saber como varía el GCI ante cambios absolutos en los juicios*
- *Pero no es lo mismo realizar un cambio absoluto (p.e. +1) en un juicio con valor p_{rs}=2 que con valor p_{rs}=8*
- *Vamos a considerar variaciones relativas en los juicios*

Reducción del Geometric Consistency Index

Resultados. Variaciones relativas

Si consideramos variaciones relativas en los juicios:

$$p_{rs} \rightarrow p'_{rs} = p_{rs} t_{rs}$$

Resultado:

Aguarón et al, 2021

$$\boxed{\left.\frac{\partial GCI(P)}{\partial t_{rs}}\right|_{t_{rs}=1} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \log e_{rs}}$$

El juicio cuya variación relativa hace disminuir más rápidamente el valor del GCI es aquel que contribuye más en su cálculo.

El juicio que primero hay que revisar es aquel cuyo $\log e_{rs}$ es mayor en valor absoluto:

- *Si $\log e_{rs} < 0$, hay que aumentar el juicio*
- *Si $\log e_{rs} > 0$, hay que disminuir el juicio*

Reducción del Geometric Consistency Index

Resultados. Variación relativa óptima

Resultado. La variación relativa del juicio p_{rs} que produce la mayor disminución del GCI viene dada por:

$$t_{rs}^{*} = \frac{p_{rs}^{*}}{p_{rs}} = e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}$$

Aguarón et al, 2021

Pero el valor de t_{rs}^{*} puede ser muy grande y queremos pequeñas variaciones relativas en los juicios:

- $t_{rs} \in \left[\frac{1}{1+\rho}, 1+\rho\right]$ *donde ρ es la denominada permisibilidad*
- $Si\ \ \log e_{rs} < 0, t_{rs} = \min\left\{e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, 1+\rho\right\}$
- $Si\ \ \log e_{rs} > 0, t_{rs} = \max\left\{e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, \frac{1}{1+\rho}\right\}$

Reducción del Geometric Consistency Index

Algoritmo

1. $J = \{(r, s), r < s\}$
2. Evaluar $\log e_{rs}$ para todo $(r, s) \in J$
3. Seleccionar el par $(r, s) \in J$ con mayor $|\log e_{rs}|$
   - Si $\log e_{rs} < 0,\ t_{rs} = \min\left\{e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, 1 + \rho\right\}$
   - Si $\log e_{rs} > 0,\ t_{rs} = \max\left\{e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, \frac{1}{1+\rho}\right\}$
4. Actualización:
   - $p'_{rs} = p_{rs} t_{rs}$ y $p'_{sr} = 1/p_{rs}$
   - $J = J \setminus (r, s)$
   - Calcular el nuevo GCI
5. Si el nuevo valor del GCI es aceptable o $J = \emptyset$, FIN.

   Si no, volver al paso 2

Reducción del GCOMPI

Definición

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}=\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(d)}\} \arrow[r, "\textit{AHP-GDM Method}"] \arrow[dr, bend right] & P \arrow[d, "\textit{RGM}"'] \\
 & v
\end{tikzcd}$$

$$GCOMPI(\mathcal{A}, v) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{k} \left(\alpha_k \sum_{i,j} log^2 \left(a_{ij}^{(k)} \frac{v_j}{v_i} \right) \right)$$

Reducción del GCOMPI

Definición

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\mathcal{A}=\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(d)}\}} \arrow[r, "AIJ"] & \boxed{A^{G}} \arrow[d, "RGM"] \\
 & \boxed{w^{G}}
\end{tikzcd}
$$

$$a_{ij}^{G} = \prod_{k=1}^{d} \left(a_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha_k}$$

Reducción del GCOMPI

Resultados

GCI (Aguarón et al, 2021)

- *Resultado 1:*

$$\frac{\partial GCI(P)}{\partial p_{rs}} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \frac{\log e_{rs}}{p_{rs}}$$

- *Resultado 2:*

$$\left.\frac{\partial GCI(P)}{\partial t_{rs}}\right|_{t_{rs}=1} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \log e_{rs}$$

- *Resultado 3:*

$$t_{rs}^* = \frac{p_{rs}^*}{p_{rs}} = e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}$$

GCOMPI (Aguarón et al)

- *Resultado 1:*

$$\frac{\partial GOMPI(\mathcal{A},v)}{\partial p_{rs}} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{p_{rs}} \log \frac{v_r/v_s}{w_r^G/w_s^G}$$

- *Resultado 2:*

$$\left.\frac{\partial GCI(\mathcal{A},v)}{\partial t_{rs}}\right|_{t_{rs}=1} = \frac{4}{(n-1)(n-2)} \log \frac{v_r/v_s}{w_r^G/w_s^G}$$

- *Resultado 3:*

$$t_{rs}^* = \frac{p_{rs}^*}{p_{rs}} = \left(\frac{v_r/v_s}{w_r^G/w_s^G}\right)^{-n/2}$$

Reducción del GCOMPI

Algoritmo

1. $J = \{(r,s), r < s\}$
2. Evaluar $q_{rs} = \frac{v_r/v_s}{w_r^G/w_s^G}$ y $\log q_{rs}$ para todo $(r,s) \in J$
3. Seleccionar el par $(r,s) \in J$ con mayor $|\log q_{rs}|$
   - Si $\log \mathrm{q}_{rs} < 0, t_{rs} = \min\left\{\mathrm{q}_{rs}^{-n/2}, 1+\rho\right\}$
   - Si $\log \mathrm{q}_{rs} > 0, t_{rs} = \max\left\{\mathrm{q}_{rs}^{-n/2}, \frac{1}{1+\rho}\right\}$
4. Actualización:
   - $p'_{rs} = p_{rs} t_{rs}$ y $p'_{sr} = 1/p_{rs}$
   - $J = J \setminus (r,s)$
5. Si $J \neq \emptyset$, volver al paso 2

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Algoritmo

1. $J = \{(r,s), r < s\}$
2. Evaluar $q_{rs} = \dfrac{v_r/v_s}{w_r^G/w_s^G}$, $\log q_{rs}$, $\log e_{rs}$ para todo $(r,s) \in J$
3. $J' = \{(r,s) \in \mathrm{J}, \log q_{rs} \times \log e_{rs} \geq 0\}$. Si $J' = \emptyset$, FIN.
4. Seleccionar el par $(r,s) \in J'$ con mayor $|\log q_{rs}|$
   - Si $\log \mathrm{q}_{rs} < 0, t_{rs} = \min\left\{\mathrm{q}_{rs}^{-n/2}, e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, 1+\rho\right\}$
   - Si $\log \mathrm{q}_{rs} > 0, t_{rs} = \max\left\{\mathrm{q}_{rs}^{-n/2}, e_{rs}^{-\frac{n}{n-2}}, \frac{1}{1+\rho}\right\}$
5. Actualización:
   - $p'_{rs} = p_{rs}t_{rs}$ y $p'_{sr} = 1/p_{rs}$
   - $J = J \setminus (r,s)$
6. Si $J \neq \emptyset$, volver al paso 2

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

PAR	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	5	7	7	5
IUV		1	1	5	1
PUV			1	5	1/3
EV				1	1/5
BV					1

PP	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	3	7	9	5
IUV		1	3	7	1
PUV			1	5	1/5
EV				1	1/5
BV					1

PSOE	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	3	5	8	6
IUV		1	3	5	4
PUV			1	3	2
EV				1	1/3
BV					1

AHP-GDM Method

P	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	5	7	9	3
IUV		1	3	6	2
PUV			1	3	1/2
EV				1	1/3
BV					1

RGM

GCI(P)= 0,165

	v
DUV	0.539
IUV	0.203
PUV	0.081
EV	0.040
BV	0.137

$GCOMPI(\mathcal{A},v)=0,5016$

$(Min\ GCOMPI=0,4640)$

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,15)

Iteración	GCI0	GCOMPI0	(r, s)	prs	Dirección	trs	p'rs	GCI'	GCOMPI'
								0,1650	0,5016
1	0,1650	0,5016	(3 - 5)	2	Decrease	0,8696	1,739	0,1592	0,4905
2	0,1592	0,4905	(1 - 3)	7	Decrease	0,8813	6,169	0,1576	0,4849
3	0,1576	0,4849	(2 - 3)	3	Decrease	0,8696	2,609	0,1489	0,4816
4	0,1489	0,4816	(1 - 4)	9	Increase	1	9,000	0,1489	0,4816
5	0,1489	0,4816	(1 - 5)	3	Increase	1,15	3,450	0,1381	0,4793
6	0,1381	0,4793	(1 - 2)	5	Decrease	0,8696	4,348	0,1119	0,4776
7	0,1119	0,4776	(4 - 5)	3	Increase	1,1065	3,319	0,1102	0,4769

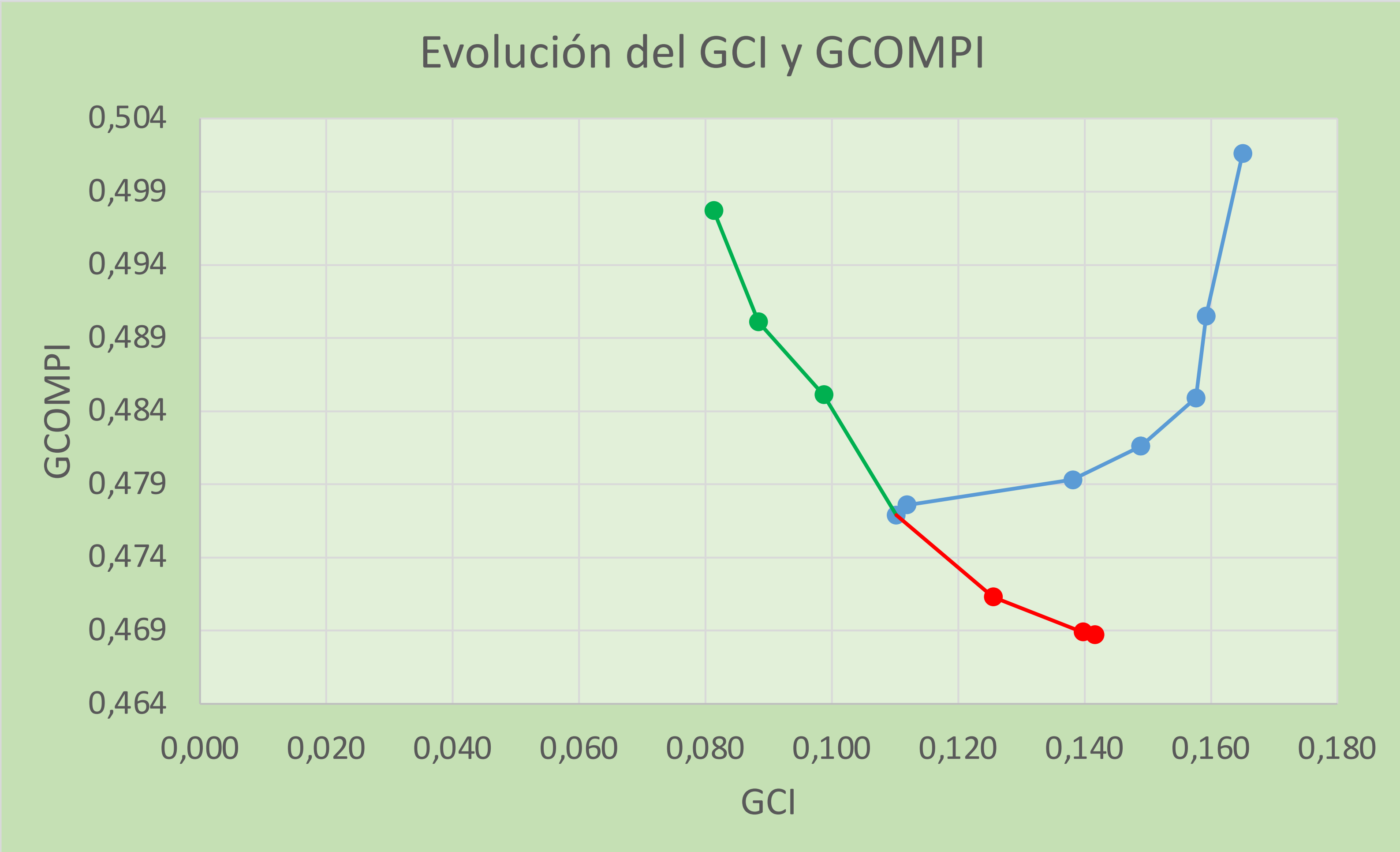
8a	0,1102	0,4769	(3 - 4)	3	Increase	1,15	3,450	0,1255	0,4713
9a	0,1255	0,4713	(2 - 5)	2	Increase	1,15	2,300	0,1397	0,4689
10a	0,1397	0,4689	(2 - 4)	6	Increase	1,0579	6,348	0,1416	0,4687

8b	0,1102	0,4769	(3 - 4)	3	Decrease	0,8696	2,609	0,0987	0,4851
9b	0,0987	0,4851	(2 - 5)	2	Decrease	0,8696	1,739	0,0884	0,4901
10b	0,0884	0,4901	(2 - 4)	6	Decrease	0,8696	5,217	0,0813	0,4977

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,15)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,15)

Iteración	GCI0	GCOMPI0	(r, s)	prs	Dirección	trs	p'rs	GCI'	GCOMPI'
								0,1650	0,5016
1	0,1650	0,5016	(3 - 5)	2	Decrease	0,8696	1,739	0,1592	0,4905
2	0,1592	0,4905	(1 - 3)	7	Decrease	0,8813	6,169	0,1576	0,4849
3	0,1576	0,4849	(2 - 3)	3	Decrease	0,8696	2,609	0,1489	0,4816
4	0,1489	0,4816	(1 - 4)	9	Increase	1	9,000	0,1489	0,4816
5	0,1489	0,4816	(1 - 5)	3	Increase	1,15	3,450	0,1381	0,4793
6	0,1381	0,4793	(1 - 2)	5	Decrease	0,8696	4,348	0,1119	0,4776
7	0,1119	0,4776	(4 - 5)	3	Increase	1,1065	3,319	0,1102	0,4769

$$\%Reducción\ GCI = \frac{0{,}1650 - 0{,}1102}{0{,}1650} = \mathbf{33{,}2\%}$$

$$\%Eficiencia\ Reducción\ GCOMPI = \frac{0{,}5016 - 0{,}4769}{0{,}5016 - 0{,}4640} = \mathbf{65{,}7\%}$$

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,15). Sólo reducción conjunta

GCI	GCOMPI
0,1650	0,5016

P	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	5	7	9	3
IUV		1	3	6	2
PUV			1	3	1/2
EV				1	1/3
BV					1

	v
DUV	0.539
IUV	0.203
PUV	0.081
EV	0.040
BV	0.137

GCI	GCOMPI
0,1102	0,4770

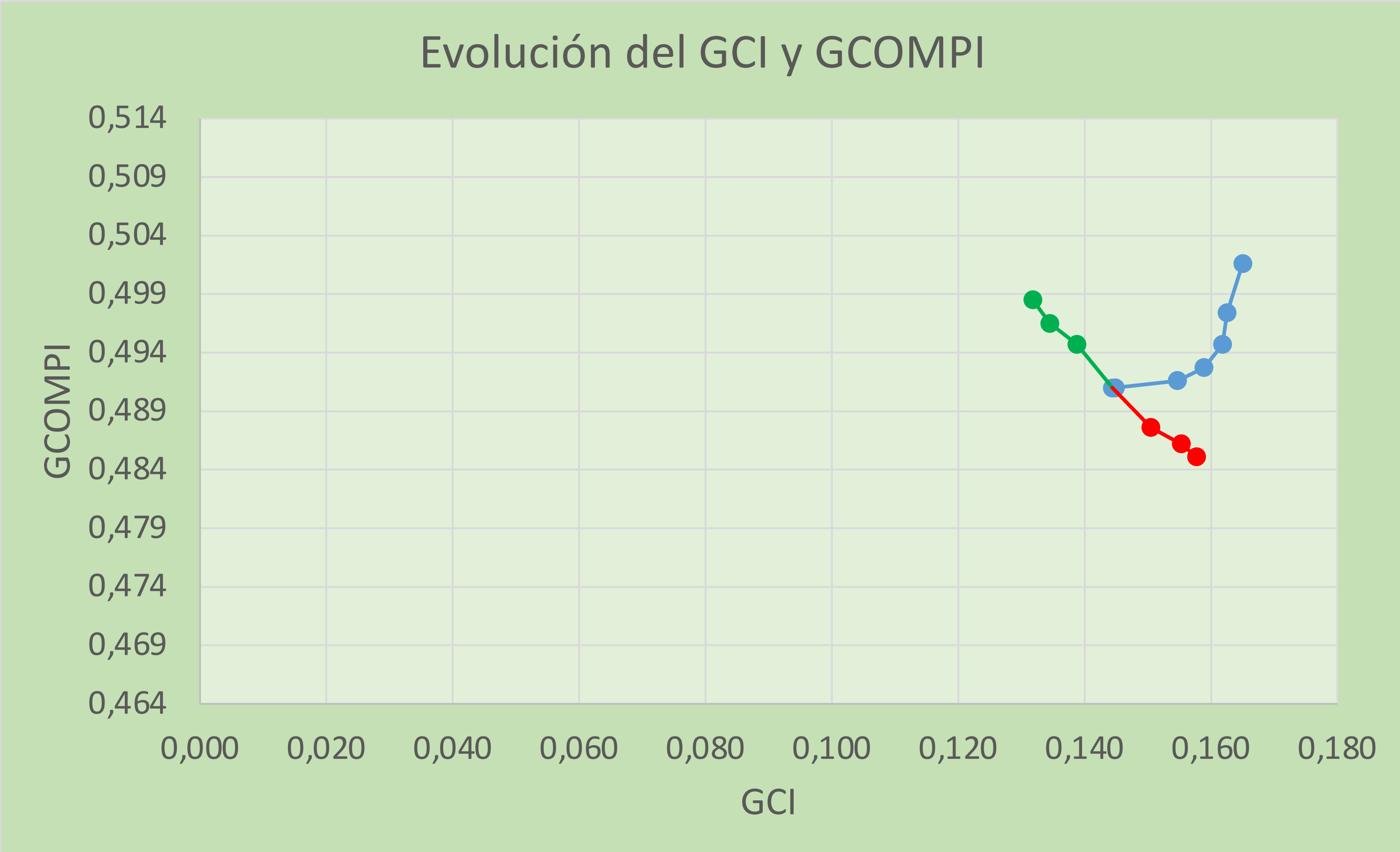
P'	DUV	IUV	PUV	EV	BV
DUV	1	4,35	6,17	9	3,45
IUV		1	2,61	6	2
PUV			1	3	0,575
EV				1	0,30
BV					1

	v'
DUV	0.532
IUV	0.206
PUV	0.089
EV	0.039
BV	0.134

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

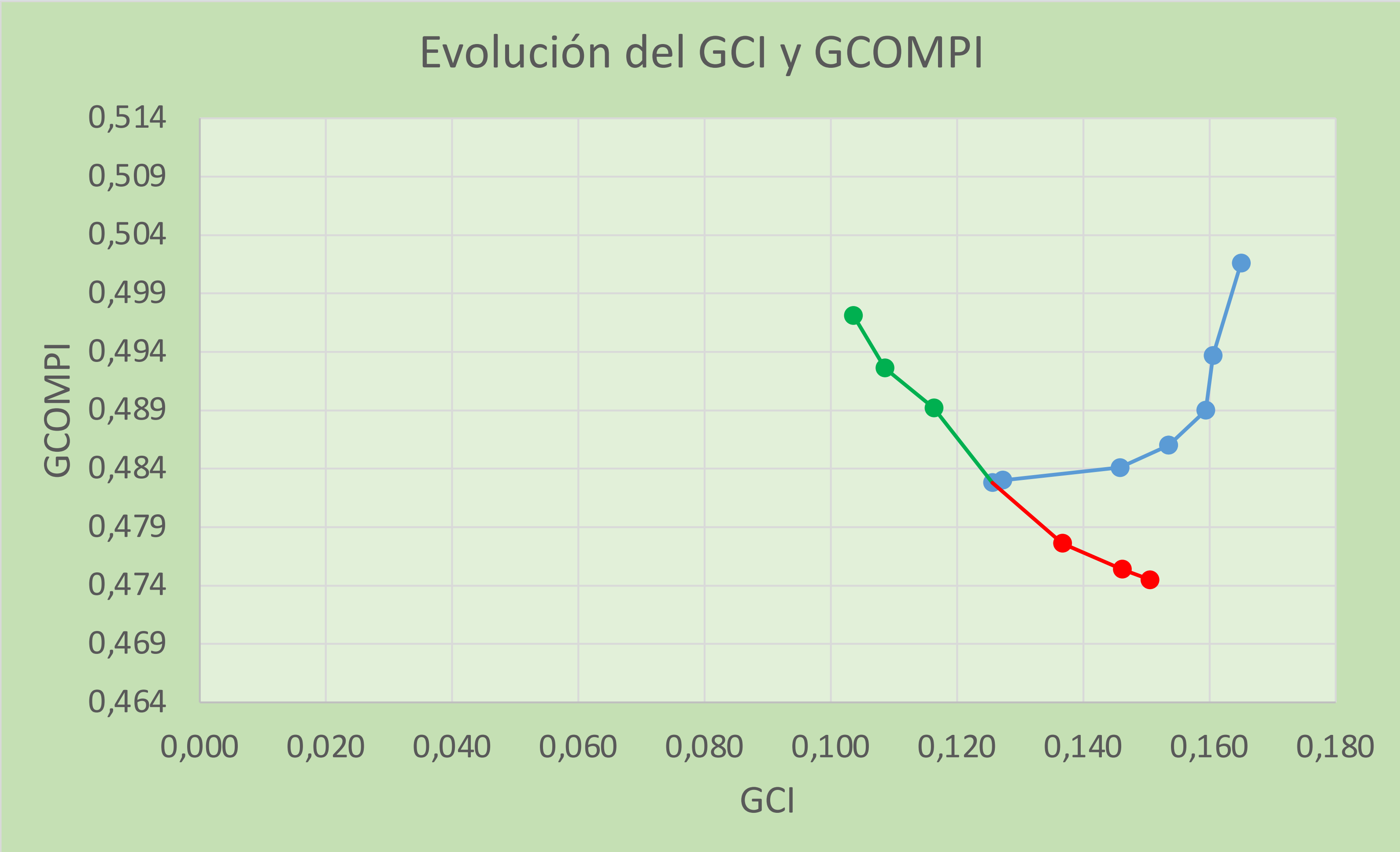
Resultados (ρ = 0,05)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

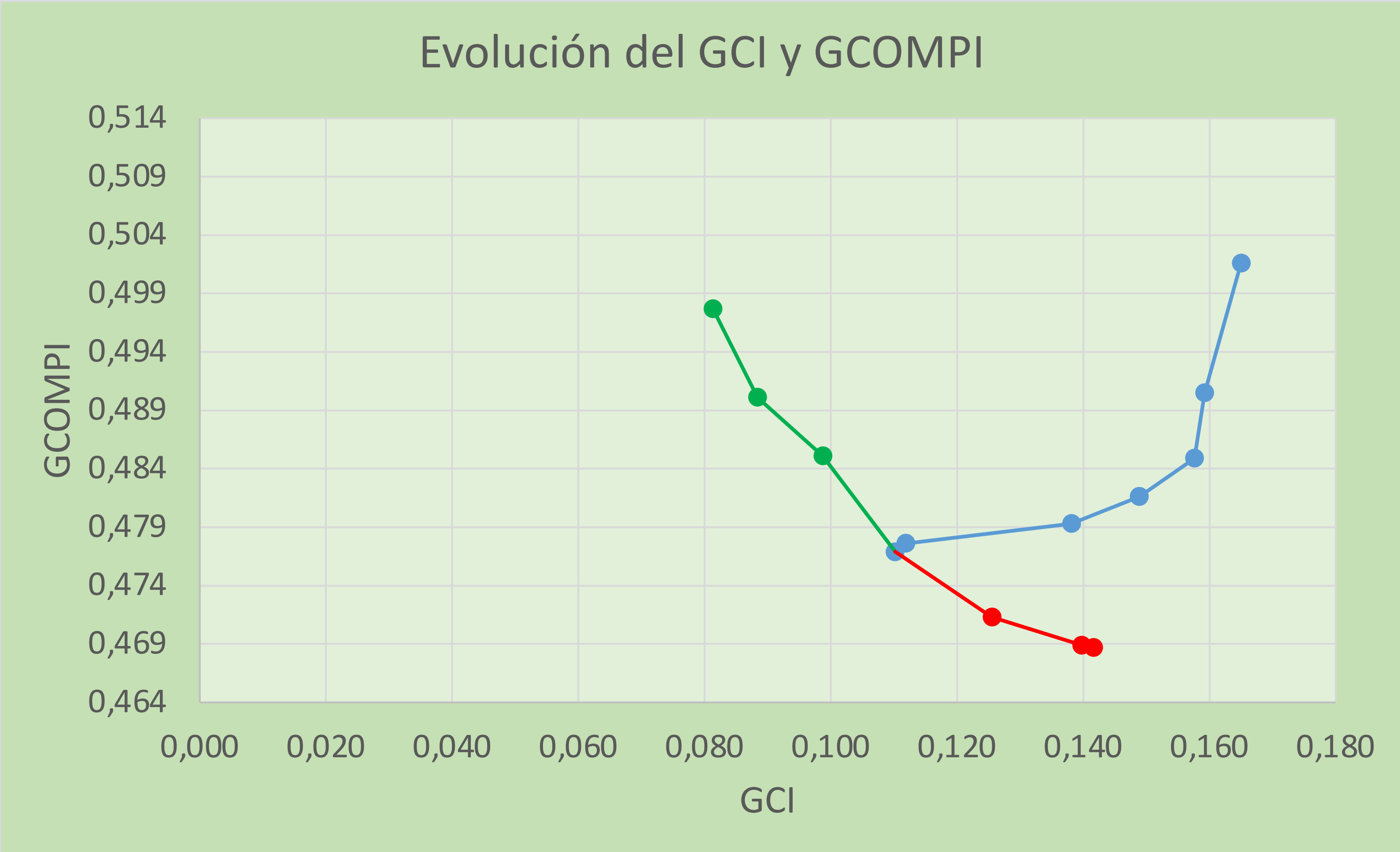
Resultados (ρ = 0,10)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

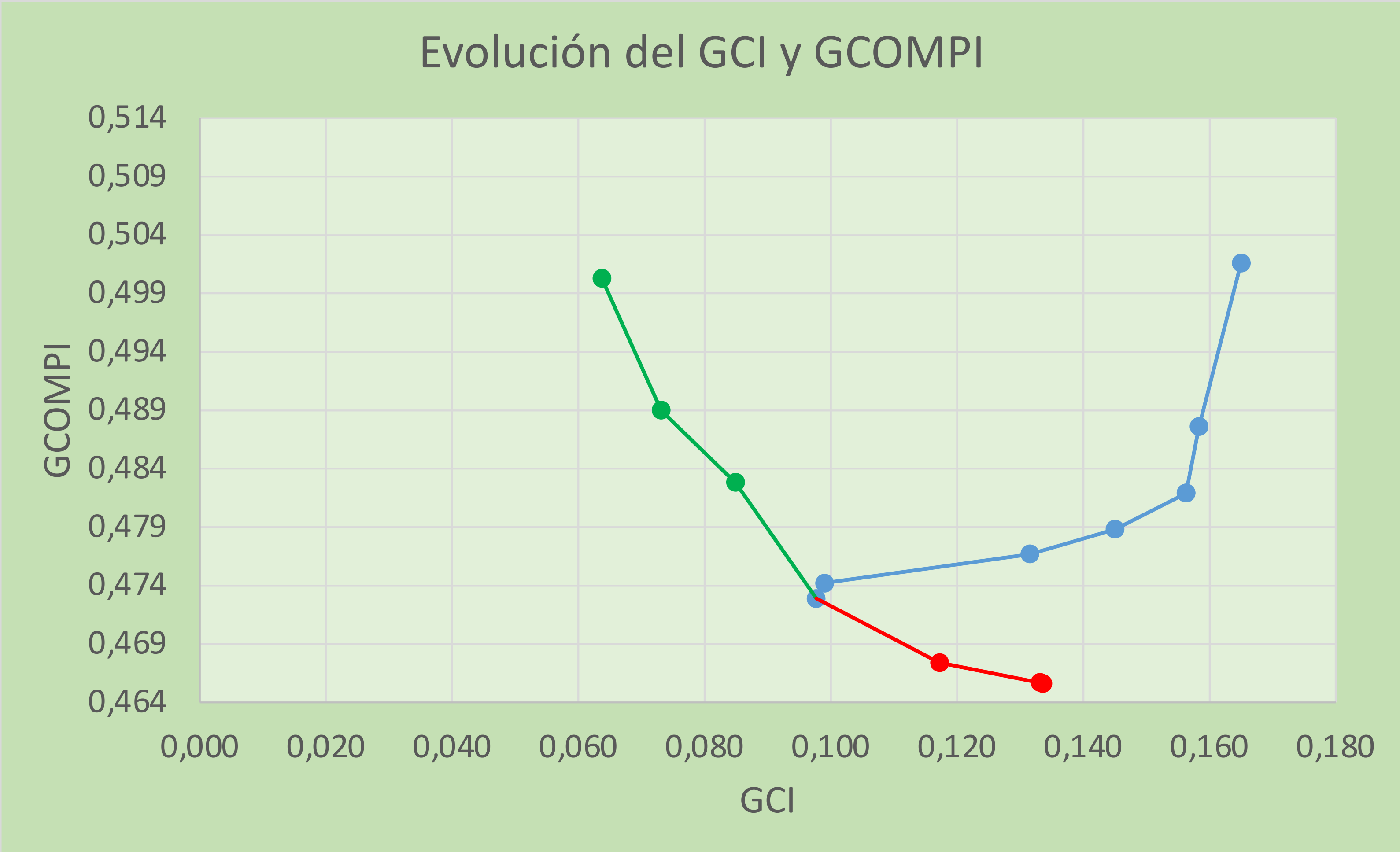
Resultados (ρ = 0,15)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

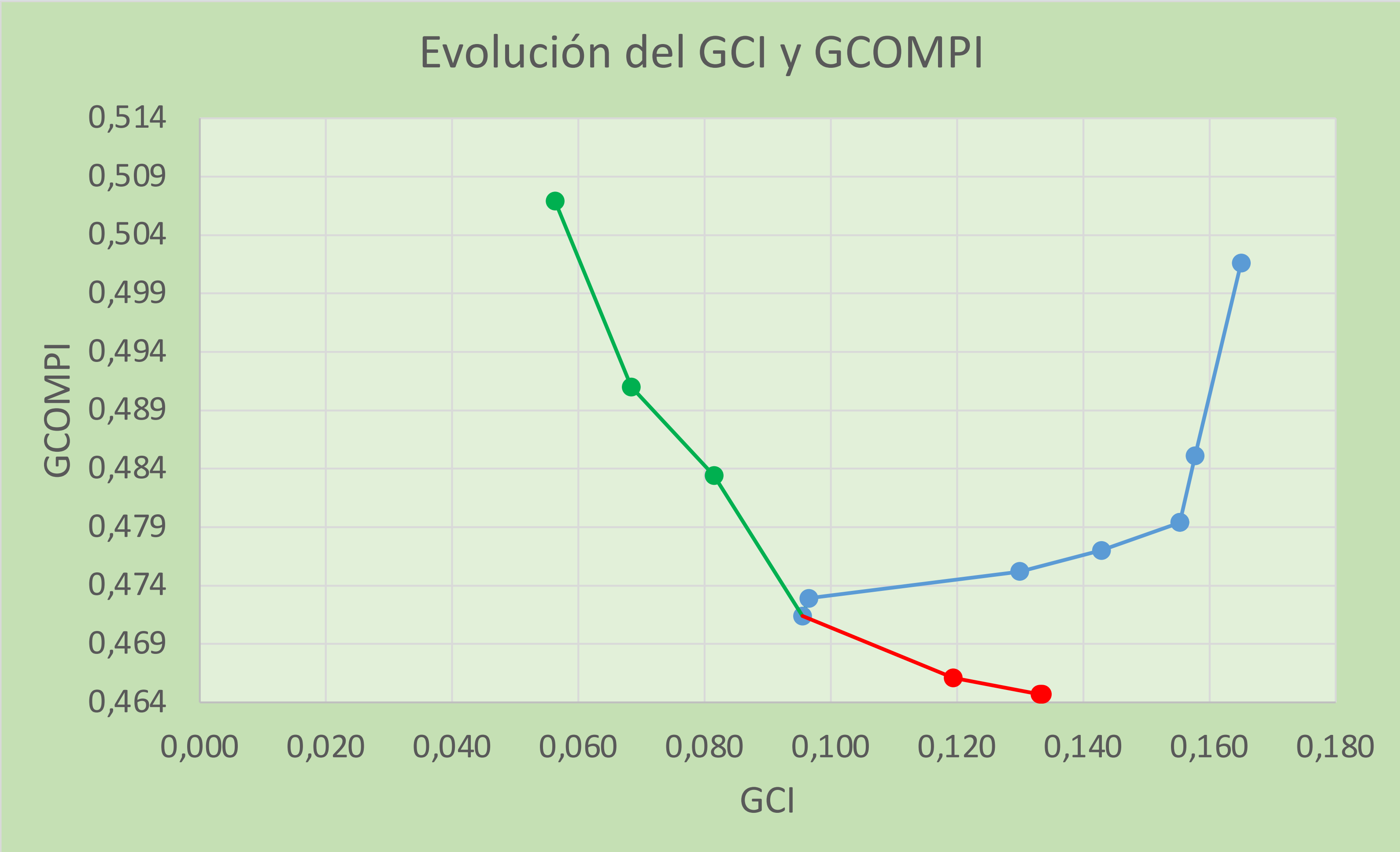
Resultados (ρ = 0,20)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

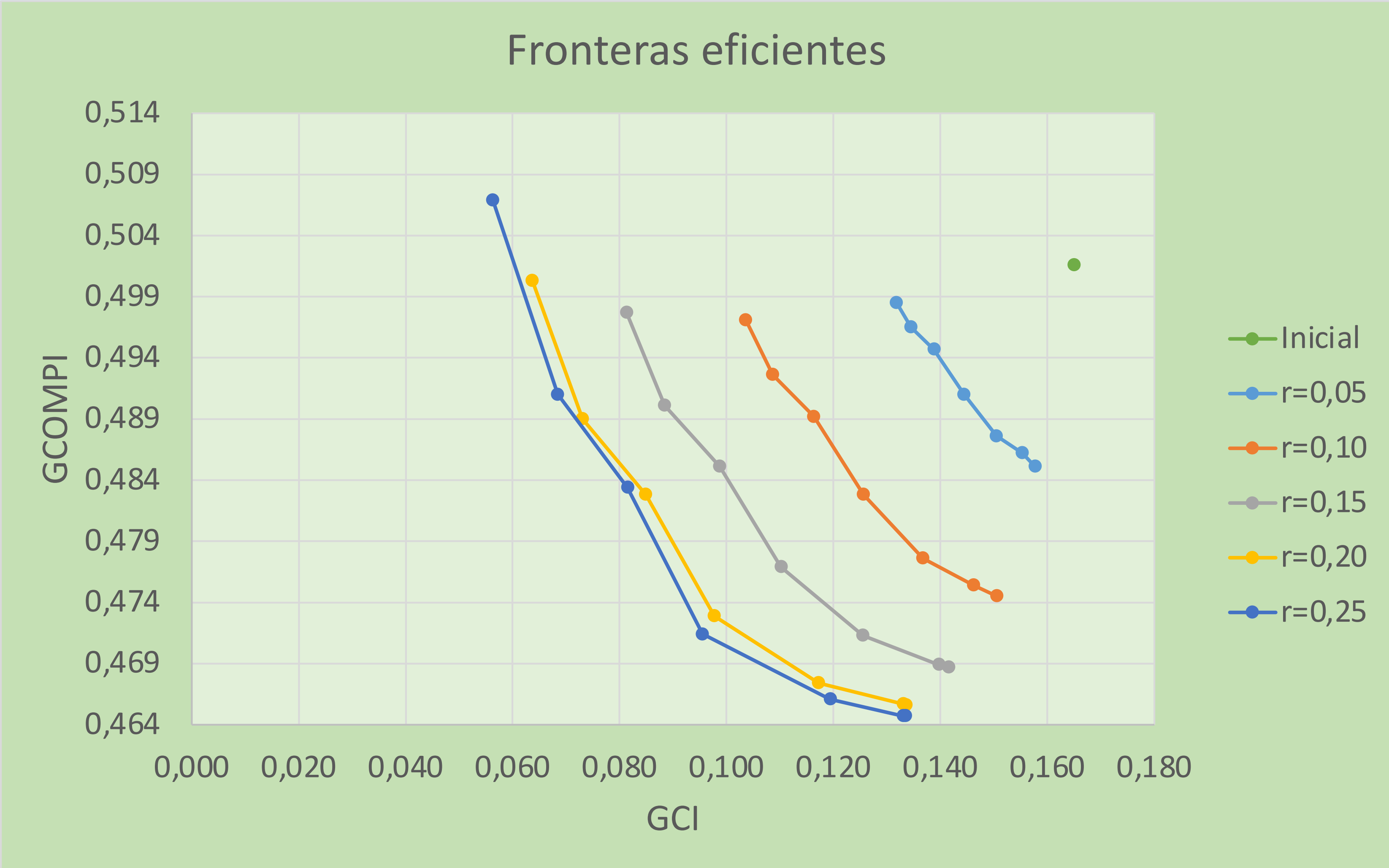
Resultados (ρ = 0,25)



Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,05..0,25)



Conclusiones

- Se aborda problema de relevancia en el contexto de Decisión en Grupo en AHP
- Combinación de los algoritmos individuales de mejora del GCI y GCOMPI para realizar una mejora conjunta
  - Reducciones significativas con permisibilidades pequeñas
  - Matriz de consenso y vector de prioridades conjunto cercanos a los de partida
- El algoritmo se puede adaptar con facilidad a situaciones especiales
- Trabajo futuro: analizar el rendimiento del algoritmo de forma análoga a la realizada para los dos algoritmos de reducción individuales

Introducción

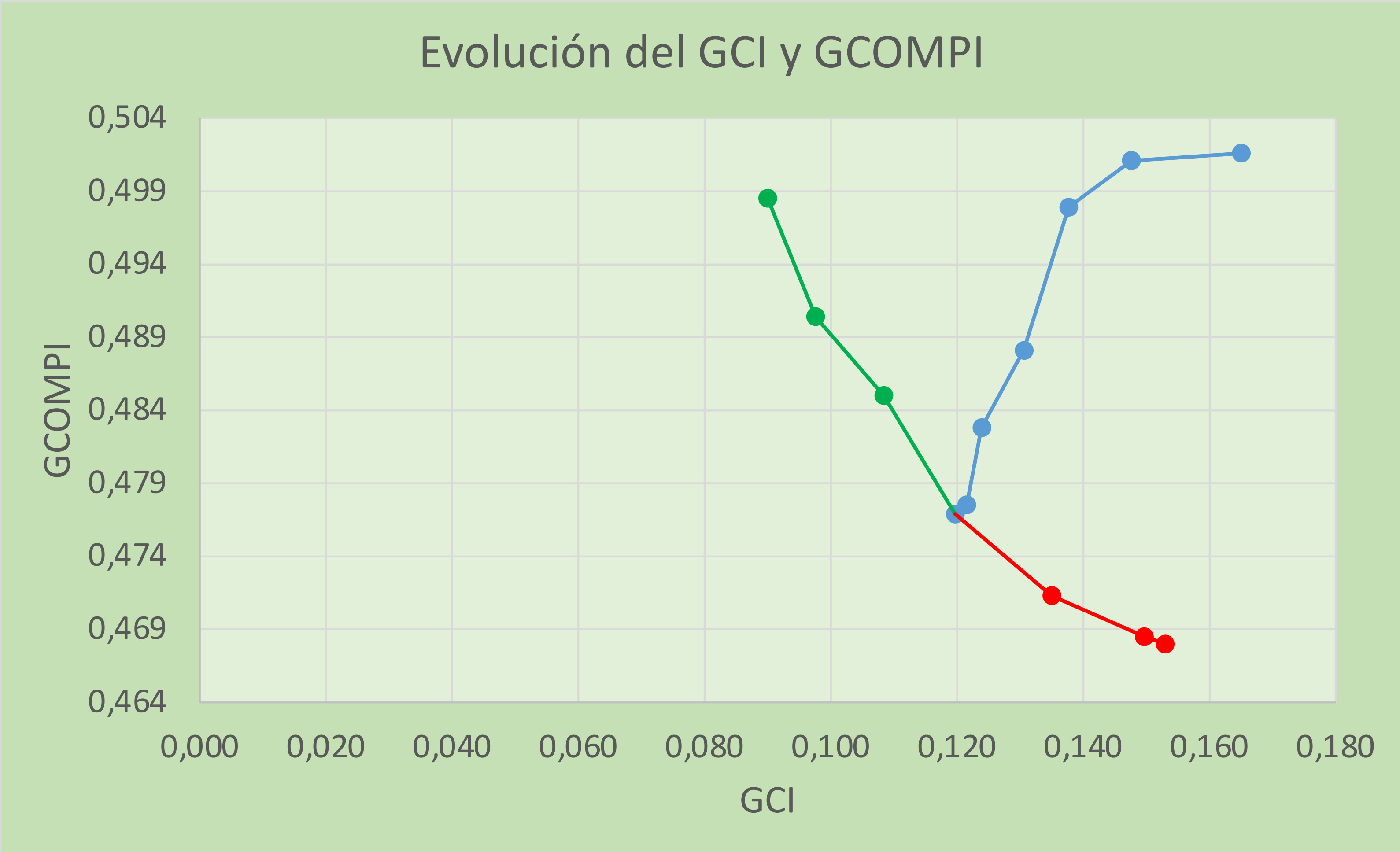
Decisión en Grupo en un Contexto Local

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}=\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(d)}\} \arrow[d, "\textit{Prioritisation Method}"'] & \\
\mathcal{W}=\{w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(d)}\} \arrow[r, "\textit{Aggregation Method}"'] & \upsilon
\end{tikzcd}$$

Reducción conjunta del GCI y GCOMPI

Ejemplo

Resultados (ρ = 0,15 dando prioridad al GCI)



Reducción del GCI

Rendimiento (Aguarón et al, 2021)

95% de éxito		GCI(A)				
		0,40	0,45	0,50	0,60	0,75
n	3	4,9%	7,3%	9,5%	13,8%	20,0%
	4	4,1%	7,7%	11,4%	18,8%	30,0%
	5	3,1%	7,1%	11,3%	19,7%	32,6%
	6	3,3%	7,6%	12,1%	21,3%	35,3%
	7	3,4%	7,9%	12,5%	22,0%	36,4%
	8	3,4%	8,0%	12,7%	22,3%	37,0%
	9	3,5%	8,1%	12,8%	22,5%	37,3%

99,5% de éxito		GCI(A)				
		0,40	0,45	0,50	0,60	0,75
n	3	5,0%	7,3%	9,6%	13,9%	20,0%
	4	4,6%	8,5%	12,5%	20,3%	31,7%
	5	3,4%	7,8%	12,5%	22,1%	37,1%
	6	3,6%	8,4%	13,3%	23,6%	39,6%
	7	3,7%	8,6%	13,7%	24,2%	40,6%
	8	3,8%	8,7%	13,8%	24,3%	40,8%
	9	3,8%	8,8%	13,8%	24,4%	40,7%

Reducción del GCOMPI

Rendimiento (Aguarón et al)

		ρ									
		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
n	3	61,5%	84,7%	93,8%	97,3%	98,7%	99,2%	99,3%	99,4%	99,5%	99,5%
	4	46,4%	71,9%	85,5%	92,6%	96,2%	98,0%	98,9%	99,4%	99,6%	99,8%
	5	43,2%	69,2%	83,9%	91,8%	95,8%	97,9%	98,9%	99,4%	99,7%	99,8%
	6	43,9%	70,5%	85,3%	93,0%	96,7%	98,4%	99,2%	99,6%	99,8%	99,9%
	7	45,3%	72,5%	87,1%	94,2%	97,4%	98,9%	99,5%	99,8%	99,9%	99,9%
	8	47,0%	74,8%	88,9%	95,3%	98,0%	99,1%	99,6%	99,8%	99,9%	100,0%
	9	48,8%	76,8%	90,4%	96,2%	98,5%	99,4%	99,7%	99,9%	99,9%	100,0%

Eficiencia media para diferentes valores de ρ y n (número de decisores = 3)

$$E = \frac{\text{Reducción realizada}}{\text{Máxima reducción posible}} = \frac{GCOMPI_0 - GCOMPI'}{GCOMPI_0 - GCOMPI_{min}}$$