Optimización de consumibles en entornos industriales

Patricia Redondo, Teresa Ortuño, Javier León

Universidad Complutense de Madrid

23 de julio de 2021

XIII Reunión del Grupo Español de Decisión Multicriterio

Contenido

- ¿Cuánto? $\rightarrow$ *tamaño de lote óptimo*

- ¿Cuánto? $\rightarrow$ *tamaño de lote óptimo*
- ¿Cuándo? $\rightarrow$ al alcanzar el *punto de pedido*

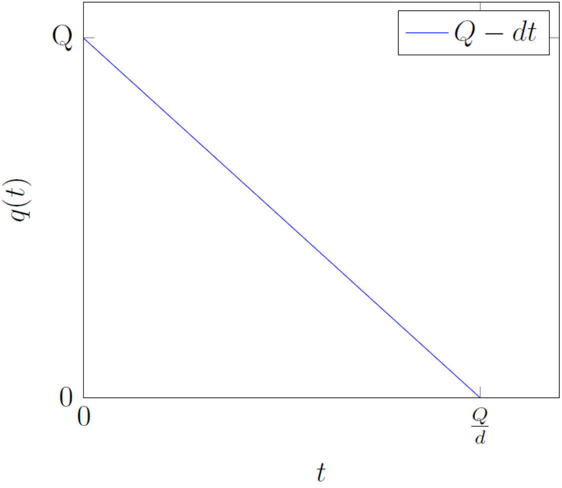
Introducción a la Teoría de Inventarios

- ¿Cuánto? → *tamaño de lote óptimo*
- ¿Cuándo? → al alcanzar el *punto de pedido*
- Demanda determinista: tasa de demanda conocida

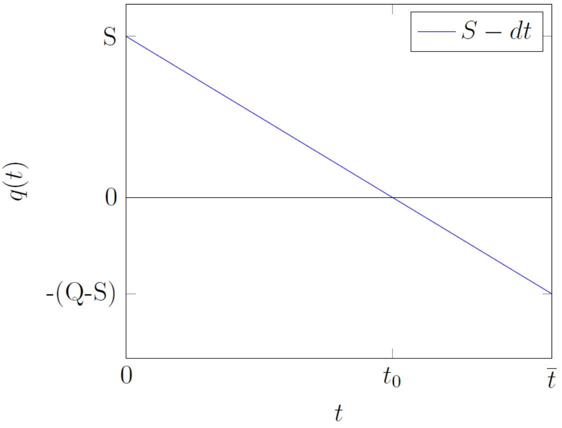
- ¿Cuánto? → *tamaño de lote óptimo*
- ¿Cuándo? → al alcanzar el *punto de pedido*
- Demanda determinista: tasa de demanda conocida
- Demanda estocástica: la demanda sigue una distribución conocida o que se puede estimar

Contenido

Demanda determinista: evolución del inventario



Demanda determinista: evolución del inventario permitiendo rotura



Modelo EOQ

- EOQ clásico (sin rotura): $Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}$
- Punto de pedido: en función de la demanda durante el tiempo de entrega
- EOQ con rotura:
  $Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u+h}{u}}$ $\qquad$ $S^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{u+h}}$
- Punto de pedido: en función de la demanda durante el tiempo de entrega y la máxima rotura permitida

Contenido

- Diversas fuentes de aleatoriedad
- Demanda como variable aleatoria
- Stock de seguridad: esperanza del nivel de inventario al final de cada periodo
- Modelo EOQ probabilizado : probabilidad de incurrir en rotura de inventario sea inferior a un determinado valor α

$$R = d^l + z_{1-\alpha}\sigma^l$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el punto de la distribución normal estandarizada tal que $\Phi\left(z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$ y d^l es la esperanza de la variable aleatoria D^l

Sistemas (Q,R) con pedidos pendientes

- Si se produce demanda cuando no se dispone de stock en el inventario, ésta se registra hasta que llega el próximo pedido y se considera un pedido pendiente.
- Cuando llega el pedido se suplen estas demandas registradas
- Coste de pedido denotado por K
- Coste de almacenamiento denotado por h
- El coste asociado a los pedidos pendientes es $b + ut$, donde t es el tiempo que el pedido ha estado registrado antes de satisfacerse
- Fórmulas simplificadas para las distribuciones Normal y Poisson

Distribución Poisson

- Nivel de inventario en mano esperado:

$$D(Q,R) = \frac{Q+1}{2} + R - d^l + \frac{1}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\begin{aligned}\beta(v) &= \sum_{u=v+1}^{\infty} (u-v-1)(1-P(u)) \\ &= \frac{(d^l)^2}{2}(1-P(v-1) - d^l \cdot v(1-P(v)) + \frac{v(v+1)}{2}(1-P(v+1))\end{aligned}$$

Distribución Poisson

- Nivel de inventario en mano esperado:

$$D(Q,R) = \frac{Q+1}{2} + R - d^l + \frac{1}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\begin{aligned}\beta(v) &= \sum_{u=v+1}^{\infty} (u-v-1)(1-P(u)) \\ &= \frac{(d^l)^2}{2}(1-P(v-1) - d^l \cdot v(1-P(v)) + \frac{v(v+1)}{2}(1-P(v+1))\end{aligned}$$

- Función de coste:

$$C(Q,R) = \frac{d}{Q}K + h\left(\frac{Q+1}{2} + R - d^l\right) + \frac{bd}{Q}\left(\alpha(R) - \alpha(R+Q)\right) + \frac{(u+h)}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\alpha(v) = \sum_{u=v+1}^{\infty} (1-P(u)) = d^l\,(1-P(v)) - v\,(1-P(v+1))$$

Distribución Normal

- Nivel de inventario en mano esperado:

$$D(Q,R) = \frac{Q}{2} + R - d^l + \frac{1}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\beta(v) = \frac{1}{2}\left[(\sigma^l)^2 + (v-d^l)^2\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{v-d^l}{\sigma_i^l}\right)\right] - \frac{\sigma^l}{2}(v-d^l)\varphi\left(\frac{v-d^l}{\sigma^l}\right)$$

Distribución Normal

- Nivel de inventario en mano esperado:

$$D(Q,R) = \frac{Q}{2} + R - d^l + \frac{1}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\beta(v) = \frac{1}{2}\left[(\sigma^l)^2 + (v-d^l)^2\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{v-d^l}{\sigma_i^l}\right)\right] - \frac{\sigma^l}{2}(v-d^l)\varphi\left(\frac{v-d^l}{\sigma^l}\right)$$

- Función de coste:

$$C(Q,R) = \frac{d}{Q}K + h\left(\frac{Q}{2} + R - d^l\right) + \frac{bd}{Q}\left(\alpha(R) - \alpha(R+Q)\right) + \frac{(u+h)}{Q}(\beta(R) - \beta(R+Q)) \text{ , donde}$$

$$\alpha(v) = \int_v^{\infty}\left[1 - \Phi\left(\frac{y-d^l}{\sigma^l}\right)\right]dy = \sigma_i^l\varphi\left(\frac{v-d^l}{\sigma^l}\right) - (v-d^l)\left[1 - \Phi\left(\frac{v-d^l}{\sigma^l}\right)\right]$$

Niveles de servicio en sistemas (Q,R)

- Tipo 1 (S^1): probabilidad de que la demanda durante el tiempo de entrega no sea superior a R, es decir, la probabilidad de que durante ese periodo no se incurra en rotura de inventario.

Niveles de servicio en sistemas (Q,R)

- Tipo 1 (S^1): probabilidad de que la demanda durante el tiempo de entrega no sea superior a R, es decir, la probabilidad de que durante ese periodo no se incurra en rotura de inventario.
- Tipo 2 (S^2): fracción de la demanda que se puede satisfacer directamente desde el inventario actual. Es una de las medidas más utilizadas en este tipo de sistemas.

$$S^2 = 1 - \frac{\alpha(R) - \alpha(R+Q)}{Q}$$

Contenido

Contenido

Demanda estocástica: Restricciones de frecuencia de pedido y nivel de servicio

Función objetivo:

$$\sum_{i=1}^{N} h_i(R_i - d_i^l + \frac{Q_i + 1}{2} + B_i(R_i, Q_i))$$

donde $B_i(R_i, Q_i)$ es el número esperado de pedidos pendientes del artículo i en cualquier momento que se puede calcular como:

$$B_i(R_i, Q_i) = \frac{1}{Q_i}[\beta_i(R_i) - \beta_i(R_i + Q_i)]$$

donde

$$\beta_i(v) = \sum_{u=v+1}^{\infty} (u - v - 1)[1 - P_i(u - 1)]$$

Restricciones:

- Frecuencia media de pedido: Un pedido de $\frac{d_i}{Q_i}$ pedidos por unidad de tiempo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{Q_i} \leq F$$

Restricciones:

- Frecuencia media de pedido: Un pedido de $\frac{d_i}{Q_i}$ pedidos por unidad de tiempo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{Q_i} \leq F$$

- Nivel de servicio medio: El nivel de servicio de cada artículo es $S_i^2 = 1 - A_i(R_i, Q_i)$ con

$$A_i(R_i, Q_i) = \frac{1}{Q_i}[\alpha_i(R_i) - \alpha_i(R_i + Q_i)] \; ; \; \alpha_i(v) = \sum_{u=v+1}^{\infty}[1 - P_i(u)]$$

Restricción:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{d_{tot}}(1 - A_i(R_i, Q_i)) \geq S \text{ donde } d_{tot} = \sum_{i=1}^{N} d_i$$

Restricciones:

- Frecuencia media de pedido: Un pedido de $\frac{d_i}{Q_i}$ pedidos por unidad de tiempo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{Q_i} \leq F$$

- Nivel de servicio medio: El nivel de servicio de cada artículo es $S_i^2 = 1 - A_i(R_i, Q_i)$ con

$$A_i(R_i, Q_i) = \frac{1}{Q_i}[\alpha_i(R_i) - \alpha_i(R_i + Q_i)] \; ; \; \alpha_i(v) = \sum_{u=v+1}^{\infty}[1 - P_i(u)]$$

  Restricción:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{d_{tot}}\left(1 - A_i(R_i, Q_i)\right) \geq S \text{ donde } d_{tot} = \sum_{i=1}^{N} d_i$$

- Otras restricciones del problema

Demanda estocástica: Restricciones de frecuencia de pedido y nivel de servicio

Modelo de programación matemática :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{N} h_i \left(R_i - d_i^l + \frac{Q_i+1}{2} + \frac{1}{Q_i}[\beta_i(R_i) - \beta_i(R_i+Q_i)] \right) \\
\text{s.a} \quad & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{Q_i} \leq F \\
& \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{d_{tot}} \left(1 - \frac{1}{Q_i}[\alpha_i(R_i) - \alpha_i(R_i+Q_i)] \right) \geq S \\
& R_i \geq \underline{R_i},\ i = 1, ..., N \\
& Q_i \geq 1,\ i = 1, ..., N \\
& R_i, Q_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, ..., N
\end{aligned}
$$

Heurísticas: tamaño del lote

Partiendo de la fórmula EOQ, la restricción de frecuencia y la cota para Q:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2Kd_i}{h_i}}\ ,\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i}{Q_i} \leq F\ ,\ Q_i \geq 1$$

se obtiene

$$Q_i = \max\left\{\frac{1}{NF}\left(\sum_{i=1}^{N}\sqrt{d_i h_i}\right)\sqrt{\frac{d_i}{h_i}}, 1\right\}$$

y se redondea al entero más cercano.

Heurísticas: punto de pedido

Aproximando la distribución de la demanda durante el tiempo de entrega por una distribución Normal y aproximando el nivel de servicio por $1 - \frac{\alpha_i(R_i)}{Q_i}$ se puede deducir la heurística:

$$R_i = \begin{cases} d_i^l + \sigma_i^l \min\left\{\sqrt{-2\ln(a)}\ ,\ z_{S_i^2}\right\} & \text{si } \ln(a) \leq 0 \\ \underline{R_i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{\sqrt{2\pi}(1 - S_i^2)(Q_i + z_{S_i^2}\sigma_i^l)}{\sigma_i^l}$$

Procedimiento

- Cálculo de Q_i con la fórmula mencionada
- Para determinar $R_i \rightarrow$ Búsqueda de valores óptimos para los niveles de servicio
- Simplificación mediante clasificación de artículos

Contenido

Demanda estocástica: Restricciones de frecuencia de pedido y nivel de servicio

Función objetivo:

$$\sum_{i=1}^{N} h_i \left(R_i - d_i^l + \frac{Q_i}{2} + B_i(Q,R) \right) + b_i d_i A_i(Q_i, R_i)$$

$$B_i(R_i, Q_i) = \frac{1}{Q_i} [\beta_i(R_i) - \beta_i(R_i + Q_i)]$$

$$A_i(R_i, Q_i) = \frac{1}{Q_i} [\alpha_i(R_i) - \alpha_i(R_i + Q_i)]$$

Modelo de programación matemática

$$\min \sum_{i=1}^{N} h_i \left(R_i - d_i^l + \frac{Q_i}{2} + B(Q,R) \right) + b_i d_i A(Q_i, R_i)$$

$$\text{s.a } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{Q_i} \leq F$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{d_{tot}} \left(1 - \frac{1}{Q_i} [\alpha_i(R_i) - \alpha_i(R_i + Q_i)] \right) \geq S$$

$$R_i \geq \underline{R_i},\ i = 1, ..., N$$

$$R_i \in \mathbb{R}, Q_i \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, ..., N$$

Heurísticas

- <u>**Cálculo del tamaño de lote óptimo:**</u> fórmula anterior

$$Q_i = \text{máx}\left\{\frac{1}{NF}\left(\sum_{i=1}^{N}\sqrt{d_i h_i}\right)\sqrt{\frac{d_i}{h_i}}, 1\right\}$$

- **Cálculo del tamaño de lote óptimo:** fórmula anterior

$$Q_i = \text{máx}\left\{\frac{1}{NF}\left(\sum_{i=1}^{N}\sqrt{d_i h_i}\right)\sqrt{\frac{d_i}{h_i}}, 1\right\}$$

- **Cálculo de los puntos de pedido:**
  Se utiliza el nivel se servicio de tipo 1 debido a su facilidad de implementación en inventarios multiproducto, es decir, para cada artículo i se determina
  R_i tal que $F(R_i) = S_i^1$.

Procedimiento

- Cálculo de Q_i con la fórmula mencionada
- Para determinar $R_i \rightarrow$ Búsqueda de valores óptimos para los niveles de servicio
- Simplificación mediante clasificación de artículos

Contenido

Contenido

Clasificaciones ABC y XYZ

El criterio clásico de la clasificación ABC se basa en el beneficio que aportan los artículos. Los artículos se distribuyen como se muestra a continuación:

- En la clase A se sitúa el 20 % de los artículos que proporcionan el mayor beneficio a la empresa.
- En la clase B, el 30 % siguiente.
- En la C, el 50 % restante.

Clasificación XYZ: según la volatilidad de la demanda

Contenido

Clasificación ABC de Zhang, Hopp y Supatgiat

Se propone ordenar los artículos en función del cociente $\frac{d_i}{l_i h_i^2}$ de forma creciente, separarlos en tres clases y fijar un nivel de servicio para cada una de las clases.

Deducción del criterio

El punto de pedido R_i se puede calcular como:

$$R_i = d_i^l + k_i\sigma_i$$

donde k_i se podía establecer de diferentes formas. Una de ellas :

$$k_i = \sqrt{-2ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{l_i}h_i d_{tot}}{\sqrt{d_i}\mu}\right)}$$

donde μ es un multiplicador de Lagrange derivado de la restricción de servicio.

Se propone ordenar los artículos en función de $\frac{d_i}{l_i h_i^2}$ de forma creciente y, a continuación, dividirlos en tres clases de forma que:

- En la clase A se sitúa el 20 % de los artículos con menor valor de $\frac{d_i}{l_i h_i^2}$.
- En la clase B se sitúa el 30 % siguiente.
- En la clase C, los restantes.

Simplificación del procedimiento:

- Cálculo de Q_i con la fórmula mencionada
- Clasificación ABC según el cociente $\frac{d_i}{l_i h_i^2}$
- Para determinar R_i $\rightarrow$ Búsqueda de niveles de servicio para cada una de las clases $\rightarrow$ puntos de pedido para cada artículo

Dado el coste de rotura b_i asociado al artículo i, se propone ordenar los artículos en función del cociente $\frac{b_i d_i}{h_i Q_i}$ de forma decreciente.

Deducción del criterio

El coste total se podía expresar como:

$$\sum_{i=1}^{N} h_i \left(R_i - d_i^l + \frac{Q_i}{2} + \frac{1}{Q} \left(\beta(R_i) - \beta(R_i + Q_i) \right) \right) + b_i d_i (1 - S_i^2)$$

La expresión del coste puede ser aproximada como:

$$c = h_i \left(R_i - d_i^l \right) + \frac{h_i Q_i}{2} + \frac{b_i d_i}{Q_i} \alpha(R_i)$$

Como se trata de una función convexa, derivando respecto de R_i e igualando a cero se obtiene el valor óptimo de $F_i(R_i)$ que minimiza el coste, es decir,

$$F_i(R_i) = 1 - \frac{h_i Q_i}{b_i d_i}$$

Simplificación del procedimiento:

- Cálculo de Q_i con la fórmula mencionada
- Clasificación ABC según el cociente $\frac{b_i d_i}{h_i Q_i}$
- Para determinar $R_i \rightarrow$ Búsqueda de niveles de servicio para cada una de las clases $\rightarrow$ puntos de pedido para cada artículo

Contenido

Software Stockwatch de OBUU

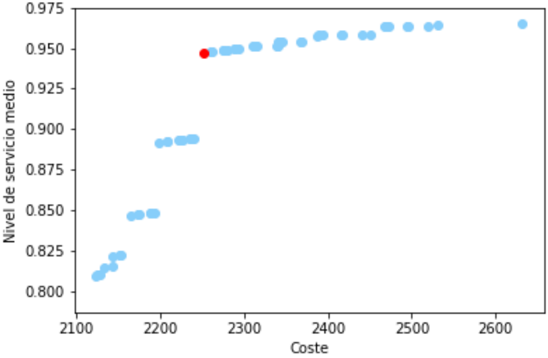
- La empresa OBUU se dedica al desarrollo de software e ingeniería
- Dispone del software Stockwatch de optimización de reparables

Conjunto procesado de datos de una empresa de transporte

price	li	Di	sigmai	hi
239.61000	124.0	0.003288	0.023247	35.941500
0.91000	49.0	0.003288	0.023247	0.136500
134.04000	94.0	0.003288	0.023247	20.106000
0.69500	16.0	0.003288	0.023247	0.104250
2.70000	18.0	0.003288	0.023247	0.405000
...	...	...	...	...
0.21000	18.0	40.707945	28.050244	0.031500
0.18030	16.0	46.553425	95.516627	0.027045
0.02020	16.0	47.033425	45.863160	0.003030
0.02799	16.0	54.986301	40.610437	0.004198
0.00300	16.0	71.076164	104.653956	0.000450

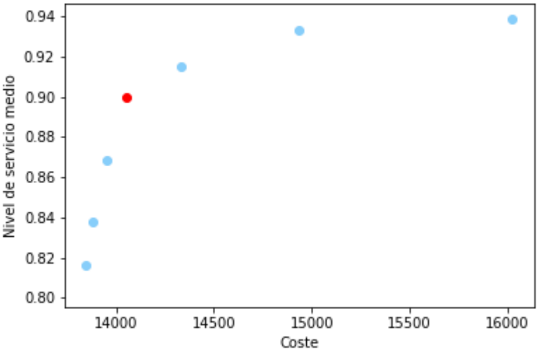
$$h_i = 0{,}15 \cdot c_i$$

Conjunto de soluciones del conjunto con distribución Normal



Se ha seleccionado la s olución más económica que supera el 90 % de nivel de servicio medio. Una vez seleccionado el punto elegido el usuario recibe el valor de las variables Q_i y R_i para cada uno de los artículos.

Conjunto de soluciones del conjunto con distribución Poisson



Tras seleccionar nuevamente la solución de menor coste que supera el 90 % de nivel de servicio medio se obtiene el valor de las variables Q_i y R_i buscadas.

Bibliografía

[Hadley and Whitin, 1963] Hadley, G. and Whitin, T. M. (1963). Analysis of inventory systems. Technical report.

[Zhang et al., 2001] Zhang, R. Q., Hopp, W. J., and Supatgiat, C. (2001). Spreadsheet implementable inventory control for a distribution center. Journal of Heuristics, 7(2):185–203.

[Teunter et al., 2010] Teunter, R. H., Babai, M. Z., and Syntetos, A. A. (2010). ABC classification: service levels and inventory costs. Production and Operations Management, 19(3):343–352.